Теоретические основы синтеза радиотехнических систем

Лекция 7.
Статистическое описание событий и процессов

Практическое понятие вероятности

Если имеется N результатов экспериментов, среди которых событие $A = A_i$ наступило $n_A(i)$ раз, то вероятность такого события определяется как $P(A = A_i) = \lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{n_A(i)}{N}$

Многомерные случайные величины

Совокупность случайных величин:

$$\mathbf{X} = \left| X_1, X_2 \ldots X_n \right|$$ - n-мерный вектор

Плотность вероятности вектора - скаляр

$$p(\mathbf{x}) \equiv p(\mathbf{X} = \mathbf{x}) = \lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0 \\ \cdots \\ \Delta x_n \to 0}} \frac{P\left(x_1 \le X_1 < x_1 + \Delta x_1, \cdots x_n \le X_n < x_n + \Delta x_n\right)}{\Delta x_1 \Delta x_2 \cdots \Delta x_n}$$

Для ГСВ:

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\left(\det\left(\mathbf{R}_{\mathbf{X}}\right)\right)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\mathbf{x} - \mathbf{m}_{\mathbf{X}}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{-1}\left(\mathbf{x} - \mathbf{m}_{\mathbf{X}}\right)\right\}$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{X}} = M\left[\left(\mathbf{X} - \mathbf{m}_{\mathbf{X}}\right)\left(\mathbf{X} - \mathbf{m}_{\mathbf{X}}\right)^{\mathrm{T}}\right]$$

Совместная и условная плотности вероятности

$$p(x,y)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{P\left(x\le X<x+\Delta x,\, y\le Y<y+\Delta y\right)}{\Delta x\Delta y}$$

$$p(x)=\int_Y p(x,y)dy$$

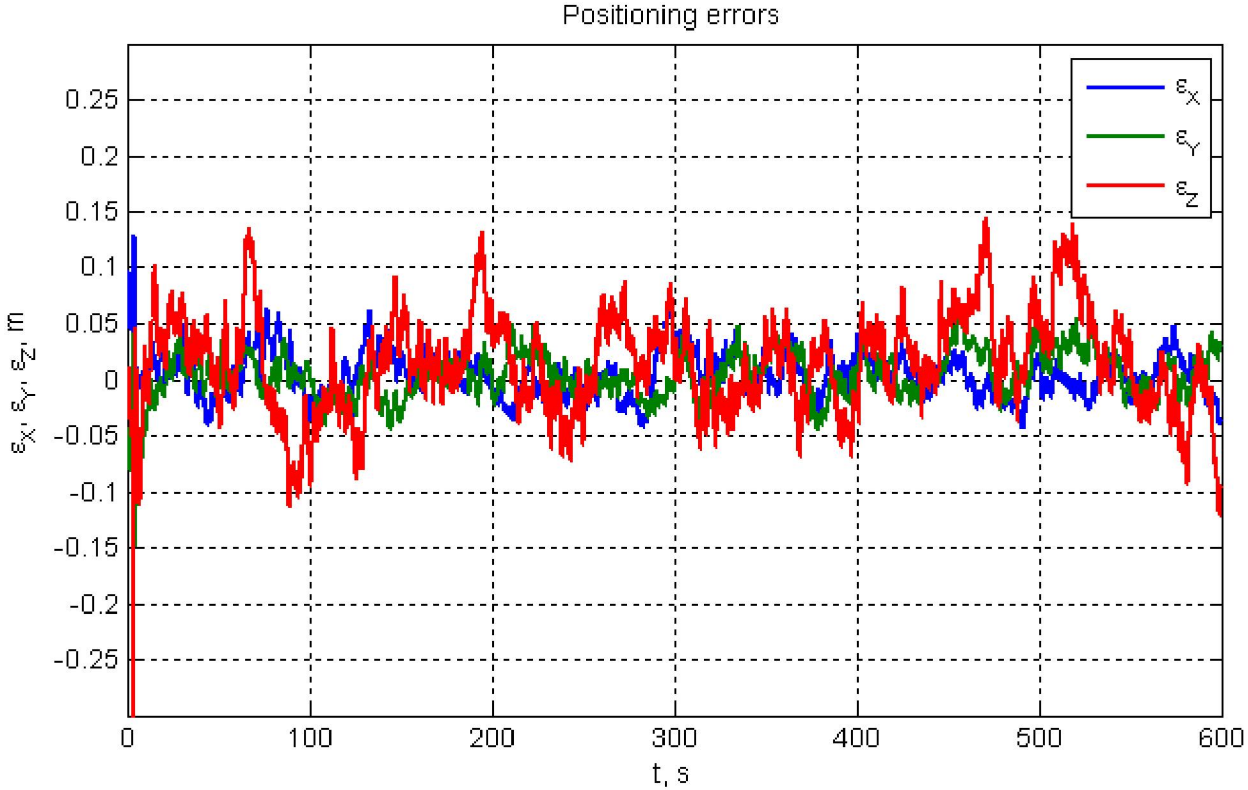
$$p\left(x,y\right)=p\left(x\,|\,y\right)p\left(y\right)$$

Если x и y независимы, то $p\left(x,y\right)=p\left(x\right)p\left(y\right)$

Случайные процессы

-Случайный процесс

- Случайная последовательность



Описывается совокупностью ПВ:

$$p\left(x_1\left(t_1\right)\right), p\left(x_1\left(t_1\right), x_2\left(t_2\right)\right), \ldots, p\left(x_1\left(t_1\right), x_2\left(t_2\right) \ldots x_n\left(t_n\right)\right)$$

Стационарность СП

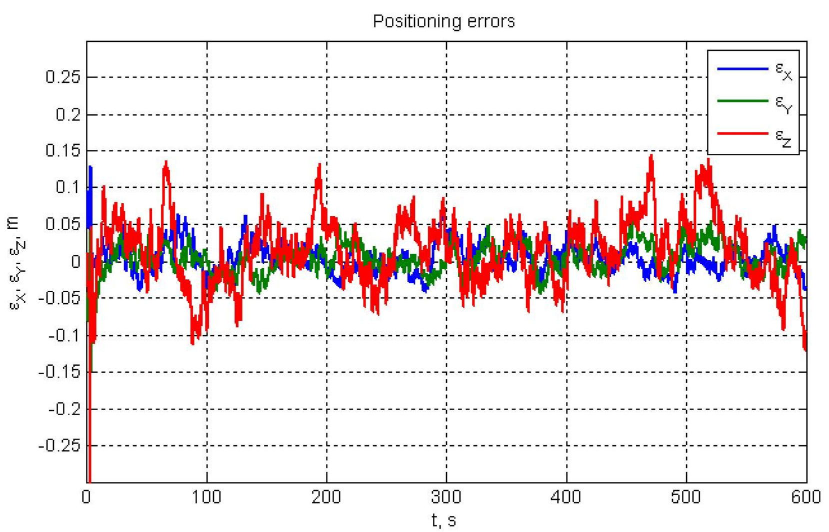
Стационарность в узком смысле

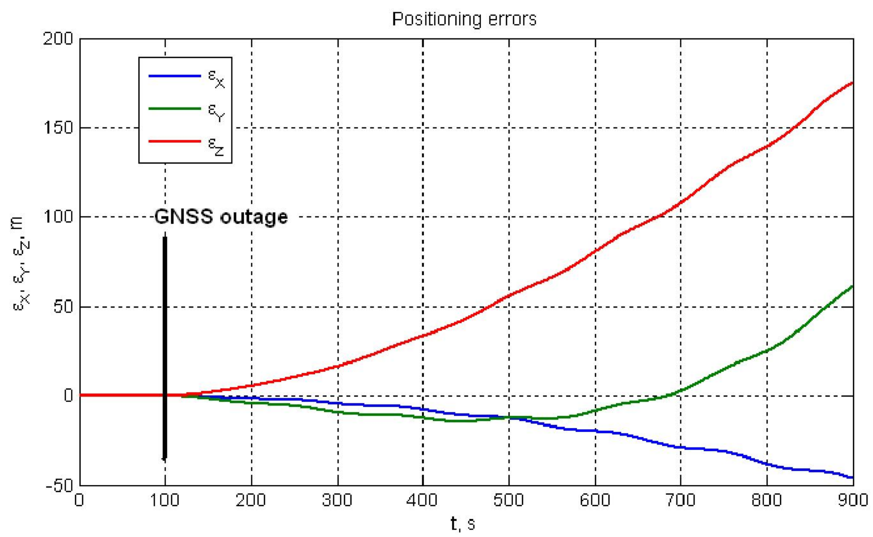
$$p\left(x(t_1-\tau),x(t_2-\tau)\ldots x(t_m-\tau)\right)=p\left(x(t_1),x(t_2)\ldots x(t_m)\right)$$

Стационарность в широком смысле

$$m_X = const, \quad D_X < \infty$$

$$R_X(t_1,t_2)=M\left[x(t_1)x(t_2)\right]=R_X(t_2-t_1)$$





Корреляционная функция и спектральная плотность СП

$$АКФ: \quad R_X(\tau) = M\left[x(t)x(t-\tau)\right]$$

$$ВКФ: \quad R_{XY}(\tau) = M\left[x(t)y(t-\tau)\right]$$

$$СПМ: \quad S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau)\mathrm{e}^{-j\omega\tau}\,d\tau$$

Гауссовские случайные процессы

Гауссовская случайная последовательность

$$\mathbf{x} = \left| x_1(t_1), x_2(t_2) \ldots x_n(t_n) \right|$$

Описывается гауссовской совместной плотностью вероятности

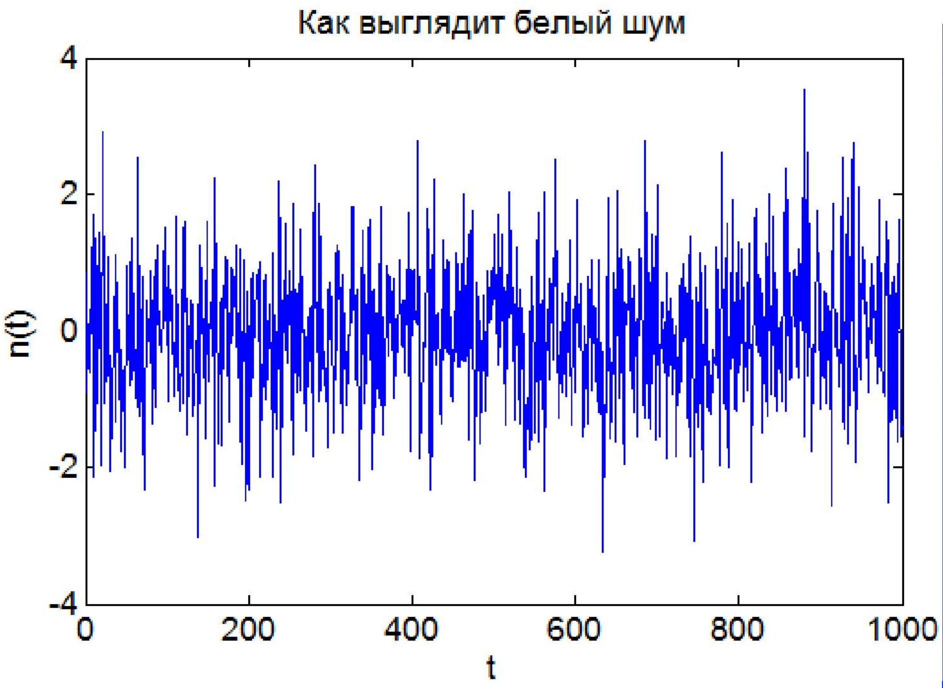
$$p(\mathbf{x}) = \frac{\exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\mathbf{x} - M[\mathbf{X}]\right)^T \mathbf{R}_X^{-1}\left(\mathbf{x} - M[\mathbf{X}]\right) \right\}}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det(\mathbf{R}_X)}}$$

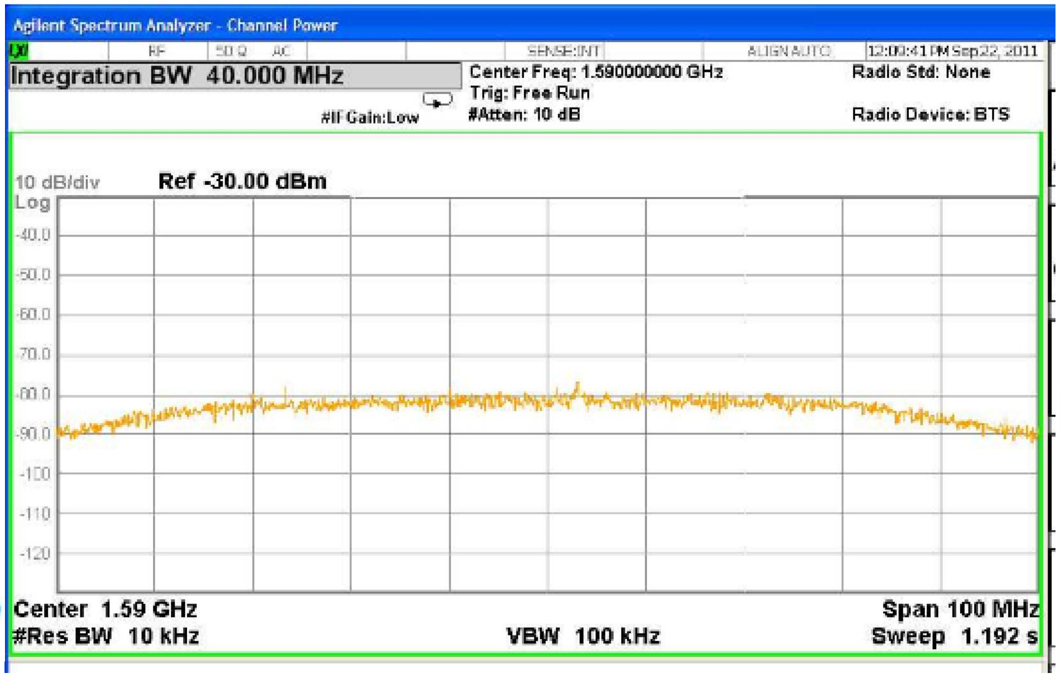
Белый гауссовский шум

$$n(t) \to R(\tau) = M\left[n(t)n(t+\tau)\right] = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

Дискретный белый гауссовский шум (ДБГШ)

$$n_i \to \mathbb{N}(0,\sigma_n) \quad R_{i,j} = M\left[n_i n_j\right] = \sigma_n^2 \delta_{i,j} \quad \text{если} \quad n_i = \frac{1}{T}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} n(t)\,\mathrm{d}t, \text{ то } \sigma_n^2 = \frac{N_0}{2T}$$





Марковские случайные процессы

Совместная ПВ для конечной точки процесса:

$$p\left(x_1(t_1), x_2(t_2) \ldots x_n(t_n)\right) = p\left(x_n(t_n) \mid x_1(t_1), x_2(t_2) \ldots x_{n-1}(t_{n-1})\right) p\left(x_1(t_1), x_2(t_2) \ldots x_{n-1}(t_{n-1})\right)$$

Для марковского случайного процесса будущее не зависит от прошлого, а зависит только от настоящего, т.е.

$$p\left(x_n(t_n) \mid x_1(t_1), x_2(t_2) \ldots x_{n-1}(t_{n-1})\right) = p\left(x_n(t_n) \mid x_{n-1}(t_{n-1})\right)$$

Стохастическое уравнение диффузионного МП:

$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)\xi(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ - для непрерывного времени

$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, k-1) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_{k-1}, k-1)\xi_{k-1}$ - для дискретного времени

Гауссовские марковские процессы

Описываются линейными стохастическими уравнениями:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)\boldsymbol{\xi}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$ - для непрерывного времени

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}_{k-1}\boldsymbol{\xi}_{k-1}$$ - для дискретного времени

$$p\left(\mathbf{x}_k\left(t_k\right) | \mathbf{x}_{k-1}\left(t_{k-1}\right)\right)$$ - гауссовская

Винеровский процесс

$$w(t)=\int_0^t n(\tau)\,d\tau \qquad D_w(t)=M\left[w^2(t)\right]=\frac{N_0}{2}t$$

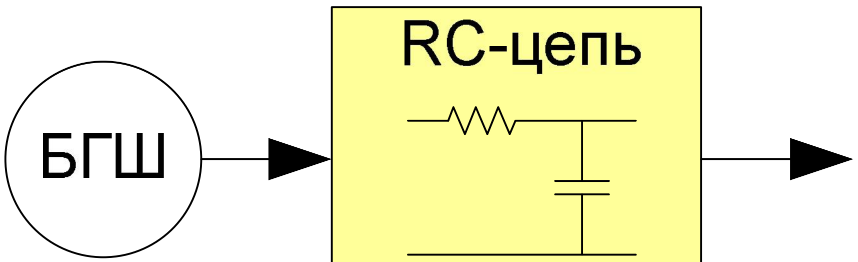
Винеровский процесс в дискретном времени

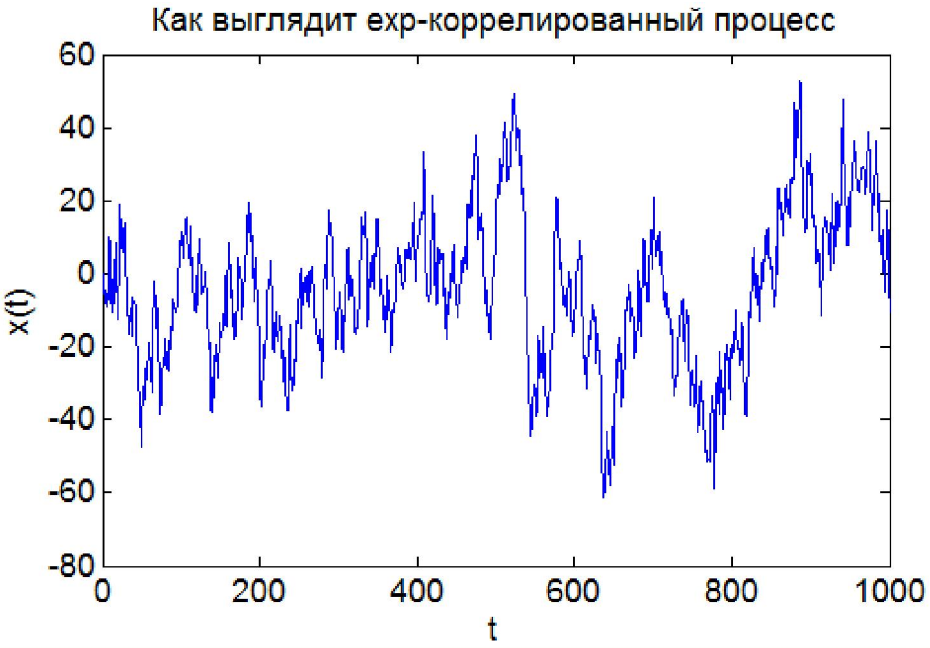
$$w_k=w_{k-1}+n_kT, \qquad n_k \to \mathbb{N}(0,\sigma_n), \sigma_n^2=\frac{N_0}{2T}$$

Экспонециально коррелированный процесс

$$\frac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}\,t} = -\alpha x(t) + \sqrt{2\alpha\sigma^2}\,n(t); \qquad R_x(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha\tau)$$

$$x_k = \exp(-\alpha T)\,x_{k-1} + \sigma\sqrt{1-\exp(-2\alpha T)}\,n_{k-1}$$





Статистическое описание сигналов, сообщений и помех

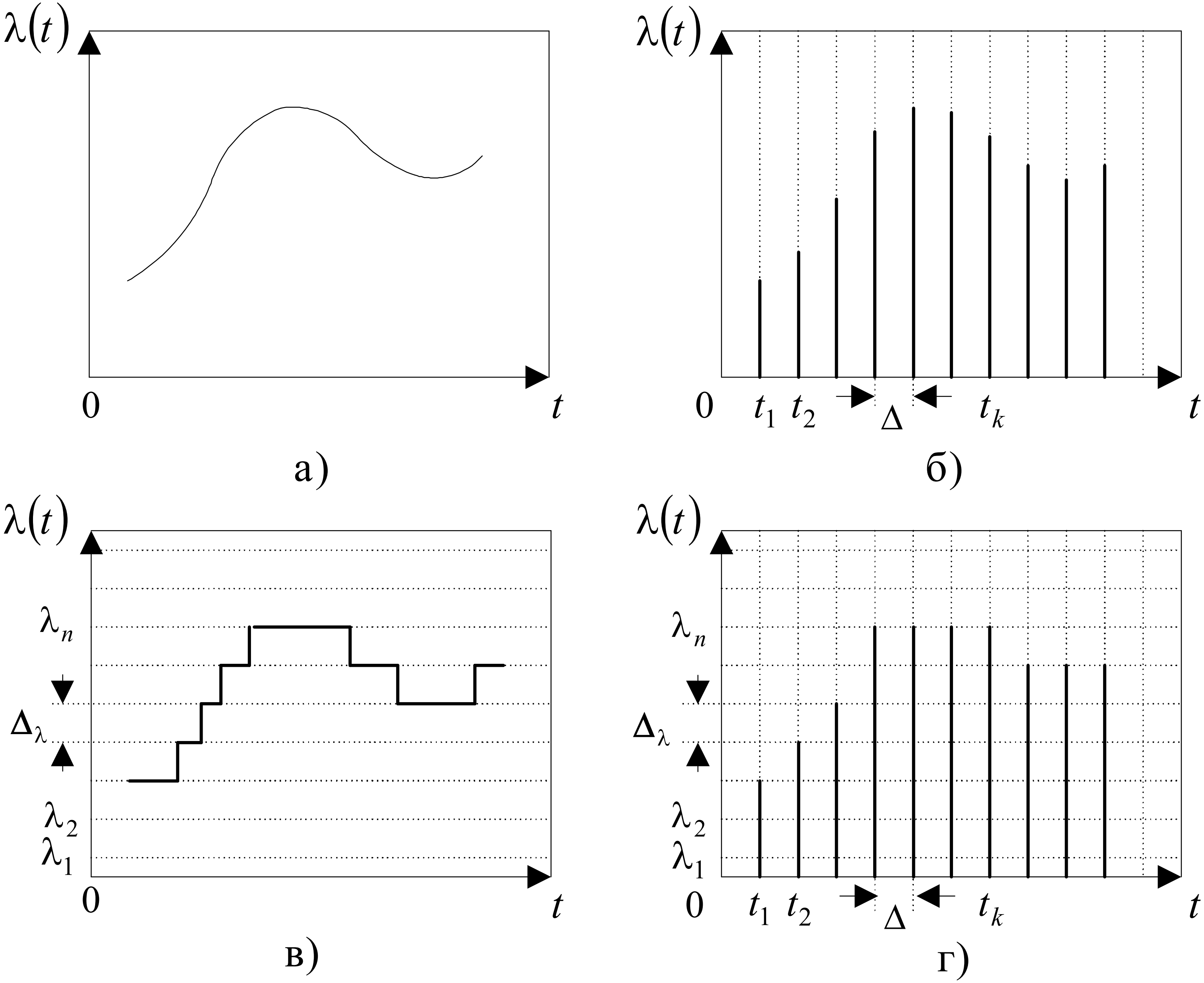
Сообщение – совокупность знаков, символов, параметров, отображающих ту или иную информацию

Сигнал – физический процесс, несущий передаваемое сообщение

Модуляция – процесс изменения параметров сигнала

Помеха – мешающий неинформативный сигнал

Виды сообщений



Узкополосные сигналы

Общий вид записи узкополосного сигнала:

$$S(t) = A(t)\cos\left(\omega_0 t + \varphi(t)\right) = \mathrm{Re}\left[A(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\omega_0 t + \varphi(t)\right)}\right]$$

Комплексная амплитуда сигнала:

$$\dot{S}(t) = A(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(t)}$$

Пример стат. описания сигнала: дрейф фазы опорного генератора при формировании «немодулированной» несущей (CW)

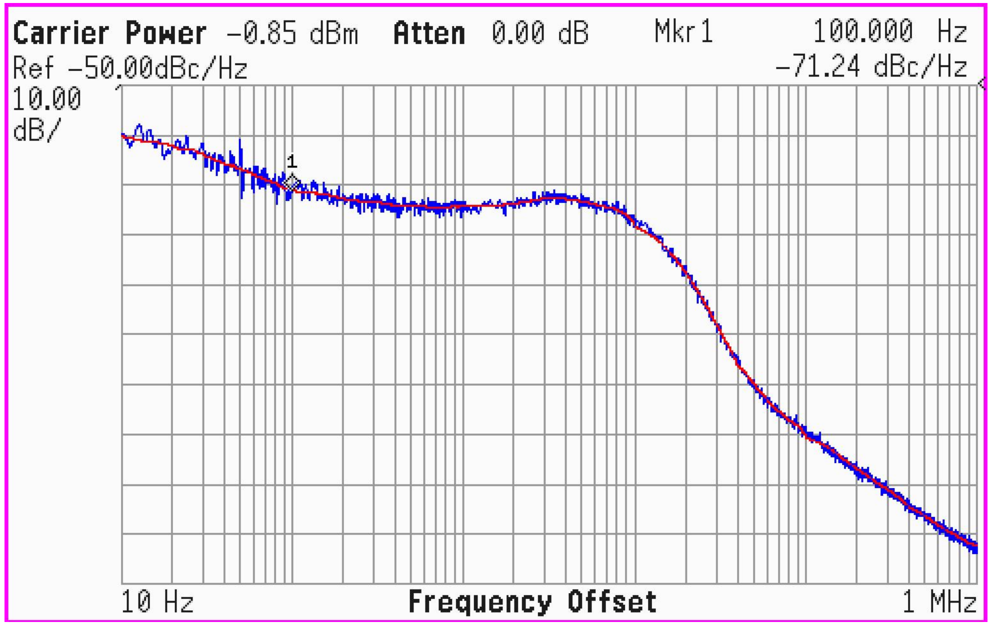
$$\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t} = \omega(t)$$

$$\boxed{\dot{S}(t) = A_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(t)}}$$

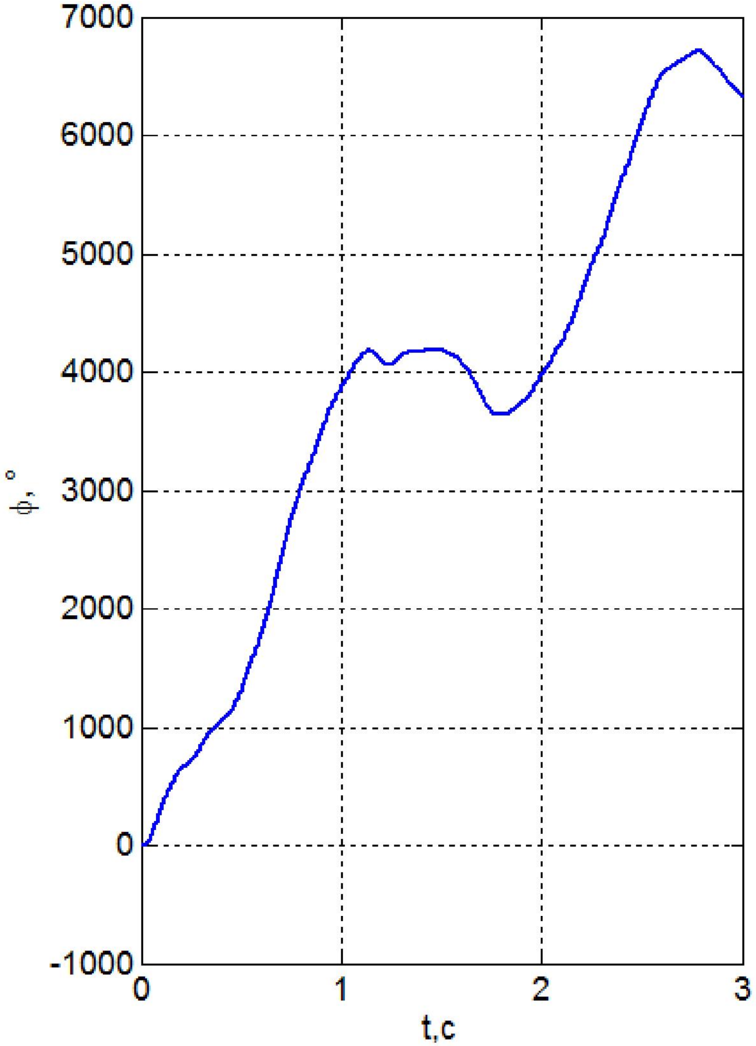
$\frac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t} = \xi_\omega(t)$ - БГШ с односторонней спектральной плотностью N_ω

Продолжение примера - дрейф фазы ОГ

Спектр процесса дрейфа фазы



Дрейф фазы во временной области



«Чистая» несущая

Несущая с нестабильным ОГ

Случайные параметры принимаемого радиосигнала

Пример: принимаемый сигнал в РНС

$$y(t) = A \cdot G(t-\tau)\cos\left((\omega_0+\omega)(t-\tau)+\varphi_0\right)+n(t)$$

$$n(t) \subset N(0,\sigma_n), \quad \tau \subset U(\tau_{\min},\tau_{\max}),$$

$$\omega \subset U(\omega_{\min},\omega_{\max}), \quad A = \frac{K_0}{(c\tau)^4}, \quad \varphi_0 \subset U(-\pi,\pi)$$

Статистические модели сообщений

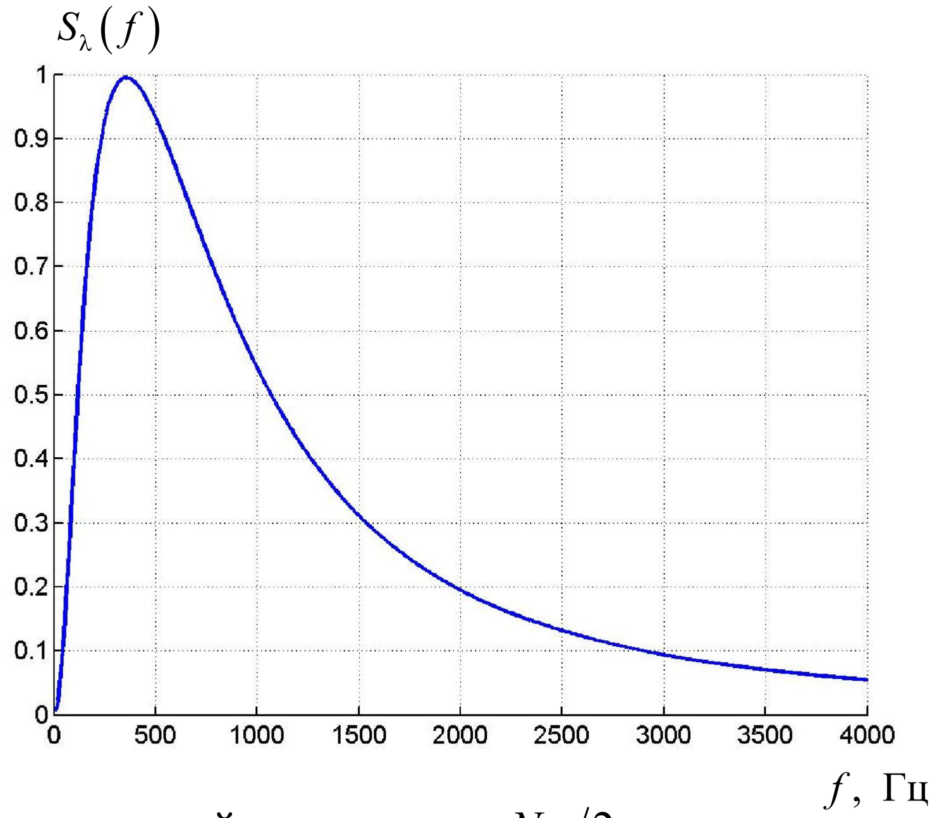
$\lambda(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t)$ - сообщение λ, отображаемое в пространстве состояний x

Пример1: речь

$$\frac{dx_1}{dt} = -\alpha_1 x_1 + Q_0\left[-\alpha_2 x_2 + \alpha_2 \xi(t)\right]$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\alpha_2 x_2 + \alpha_2 \xi(t)$$

$$\mathbf{x} = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}, \quad \lambda(t) = x_1(t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix}$$



$\xi(t)$ – белый гауссовский шум с двусторонней спектральной плотностью $N_\xi/2$.

Пример 2: задержка радионавигационного сигнала

$$y(t) = A \cdot G\big(t - \tau(t)\big)\cos\big(\omega_0 t + \varphi(t)\big) + n(t)$$

$$\lambda(t) \equiv \tau(t) = R(t)/c$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 - \frac{\omega_0}{c} R(t), \quad \varphi_0 \subset U(-\pi, \pi)$$

Статистическая модель изменения дальности R(t):

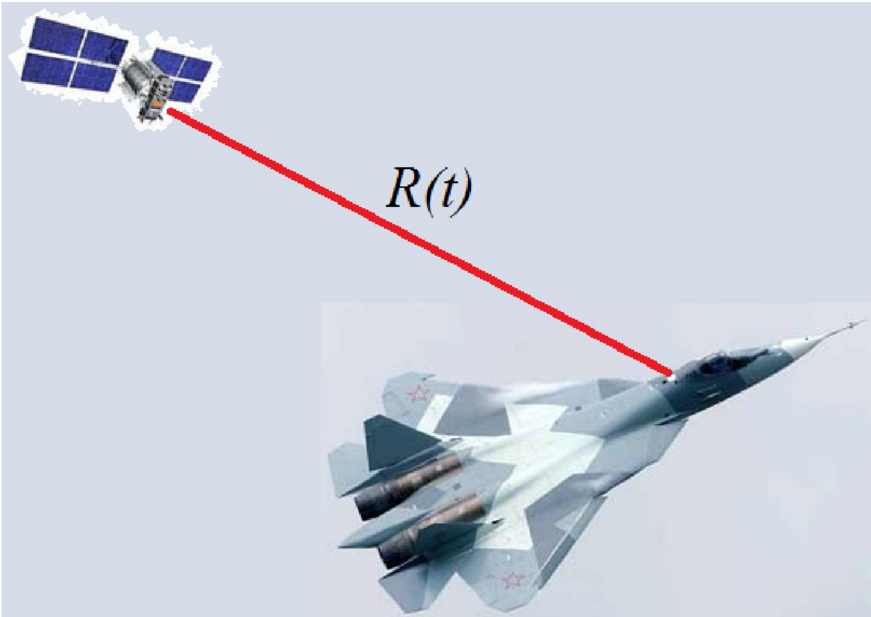
$$\frac{dR}{dt} = V(t),$$

$$\frac{dV}{dt} = a(t),$$

$$\frac{da}{dt} = -\alpha a(t) + \alpha \xi(t),$$

$\xi(t)$ – БГШ с односторонней СПМ N_ξ

$$\boxed{\begin{array}{l} 1/\alpha = 1 \ldots 60 \text{ с} \\ \sigma_a = \sqrt{\alpha N_\xi / 4} = 1 \ldots 50 \text{ м/с}^2 \end{array}}$$



Векторно-матричное описание стат. модели *R(t)*

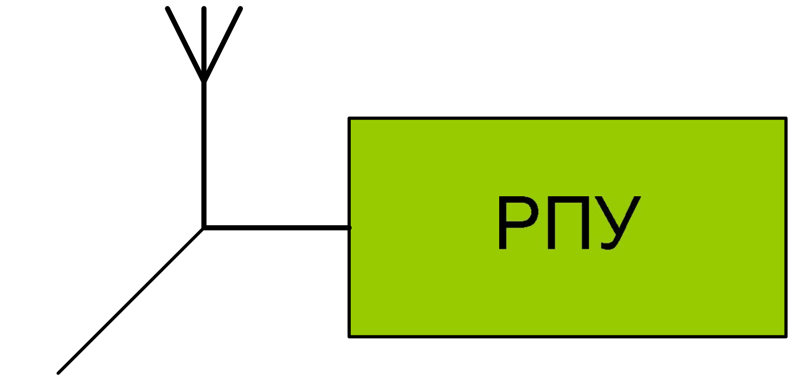
$$\mathbf{x} = \begin{vmatrix} R & V & a \end{vmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad R(t) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{x}$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}\xi(t)$$

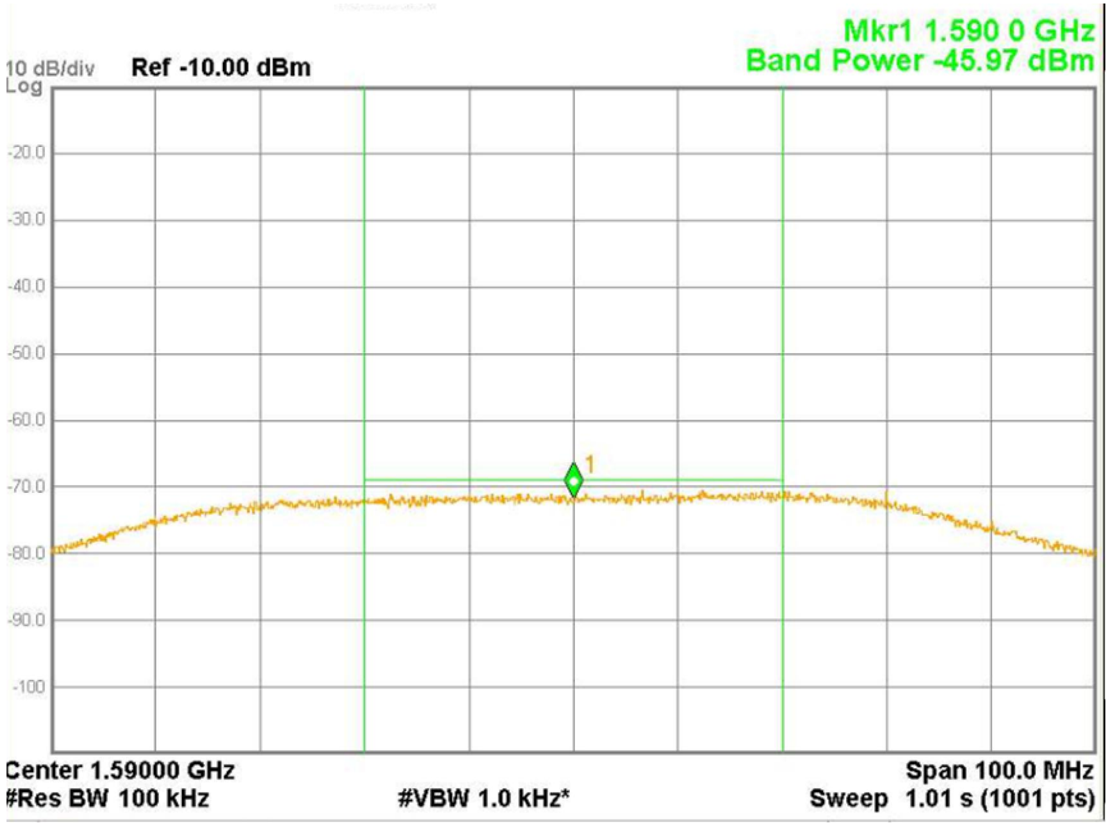
$$\mathbf{F} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\alpha \end{vmatrix} \qquad \mathbf{G} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{vmatrix}$$

Статистические модели помех

1. Внутренний шум приемника



$n(t)$ – БГШ с односторонней СПМ N_0



$$N_0 = kT_ш = kT_0 K_ш$$

$$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \quad \text{Вт}/(\text{Гц} \cdot \text{К})$$

$$T_0 = 300K$$

$$K_ш = 2 \ldots 3$$

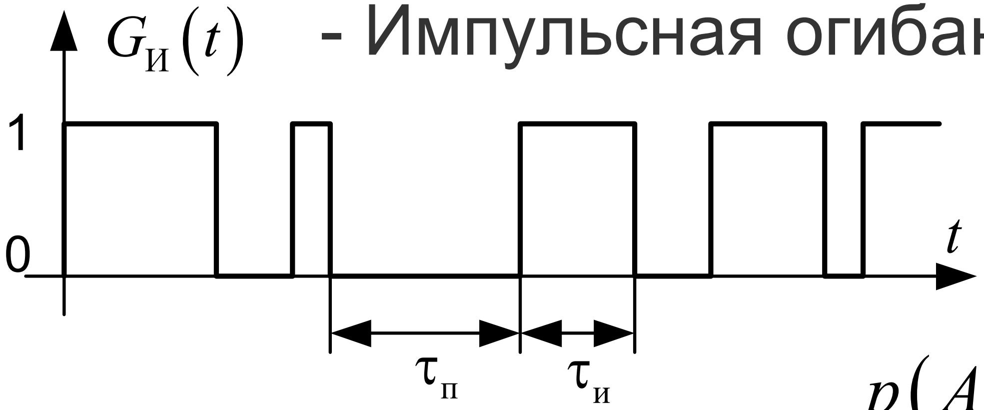
Узкополосные импульсные помехи

$$S_п(t) = A_п(t) G_И(t) \cos\left(\omega_0 t + \varphi_п(t)\right)$$

$A_п(t)$ и $\varphi_п(t)$ – случайные амплитуда и фаза помехи

$$\frac{d\varphi_п}{dt} = \xi(t)$$ - винеровский процесс с гауссовской ПВ

$G_И(t)$ - Импульсная огибающая



$$\tau_и \subset U\left(\tau_{и,мин}, \tau_{и,макс}\right)$$

$$\tau_п \subset U\left(\tau_{п,мин}, \tau_{п,макс}\right)$$

$$p(A_п) = \frac{\nu}{2^{3/2}\sigma_п \Gamma(1/\nu)} \exp\left(-\frac{|A_п|^\nu}{2^{\nu/2}\sigma_п^\nu}\right)$$

$$\nu = 0{,}5 \ldots 2$$

Основы теории статистических решений

Оценивание – принятие решения о значении сообщения в каждый момент, либо в заданные моменты времени

Основной вопрос теории статистического синтеза:

«Какая система оценивает сообщения наилучшим образом ???»

Определения понятий

$$y(t) = S(t, \lambda(t)) + n(t)$$

Наблюдение на интервале времени $[0,t] \rightarrow$ реализация Y_0^t

Сигнал

Сообщение $\lambda(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t)$

$\mathbf{x}(t) -$ векторный марковский процесс с априорной ПВ: $p(\mathbf{x},t)$

Шум/помеха

Апостериорная ПВ: $p\left(\mathbf{x},t \mid Y_0^t\right)$

Определение понятий

Решение – результат обработки информации в РТС

Принятие решения – процесс обработки информации в РТС

Решающее правило – алгоритм обработки (u)

Функция потерь (c) – показатель качества алгоритма обработки

$\mathbf{d} = \mathbf{u}\left(Y_0^t\right)$; $\mathbf{d}$- результат решения

$\mathbf{u}(*)$ - решающее правило

$c(\mathbf{x}, \mathbf{d})$ - функция потерь

Функция потерь

Свойства:

1) $c(\mathbf{x},\mathbf{d})$ - скалярная

2) $c(\mathbf{x},\mathbf{x})=0$ (потери равны нулю, если $\mathbf{d}=\mathbf{x}$)

3) $c(\mathbf{x},\mathbf{d}_1)\geq c(\mathbf{x},\mathbf{d}_2)$ всегда, если $\|\mathbf{x}-\mathbf{d}_1\|\geq\|\mathbf{x}-\mathbf{d}_2\|$

4) $c(\mathbf{x},\mathbf{d}_1)=c(\mathbf{d}_1,\mathbf{x})$

Примеры:

1) квадратичная $c(\mathbf{x},\mathbf{d})=\|\mathbf{x}-\mathbf{d}\|_Q^2$,

2) модульная $c(\mathbf{x},\mathbf{d})=\|\mathbf{x}-\mathbf{d}\|_Q$,

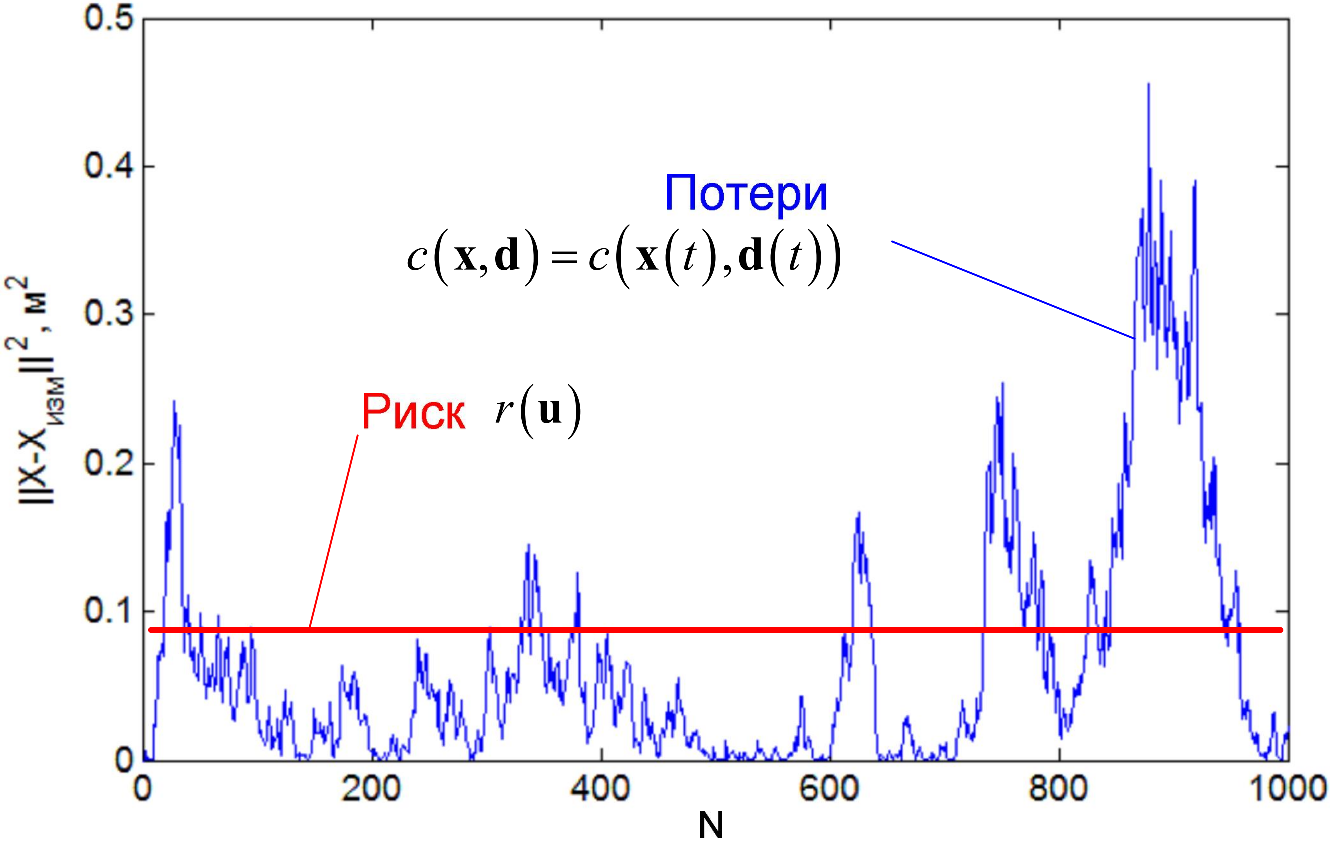
3) простая $c(\mathbf{x},\mathbf{d})=\begin{cases}0, & \|\mathbf{x}-\mathbf{d}\|_Q<\varepsilon/2,\\ 1/\varepsilon, & \|\mathbf{x}-\mathbf{d}\|_Q\geq\varepsilon/2,\end{cases}$.

Здесь $\|*\|$ – символ нормы вектора, $\varepsilon=const\to 0$

Риск

Потери меняются во времени: $c(\mathbf{x},\mathbf{d}) = c(\mathbf{x}(t),\mathbf{d}(t))$

<u>Риск</u> – усредненные потери.



Средний риск: $$r(\mathbf{u},t) = \iint c\left(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}\left(Y_0^t\right)\right)p\left(\mathbf{x}(t),Y_0^t\right)d\mathbf{x}(t)\,dY_0^t$$

Оптимальные решения

Байесовские решения – минимизируют средний риск

$$\mathbf{u}_0 = \arg\min_{\mathbf{u}} \, r(\mathbf{u}) = \arg\min_{\mathbf{u}} \iint c(\mathbf{x},\mathbf{u}(Y))\, p(\mathbf{x},Y)\, d\mathbf{x} dY$$

Оптимальное решающее правило для квадратичной функции потерь – апостериорное среднее:

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{y}) = \hat{\mathbf{x}} = \int \mathbf{x} p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) d\mathbf{x}$$

Оптимальное решающее правило для простой функции потерь – максимум апостериорной ПВ:

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{y}) = \hat{\hat{\mathbf{x}}} = \arg\min_{\mathbf{u}} \int (b - \delta(\mathbf{x}-\mathbf{u})) p(\mathbf{x}|Y) d\mathbf{x} = \arg\max_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}|Y)$$

Оптимальные решения

Минимаксные решения – минимизируют максимум условного риска

$$\tilde{r}(\mathbf{x},\mathbf{u}) = \int c(\mathbf{x},\mathbf{u}(Y))p(Y|\mathbf{x})dY$$

Оптимальное решающее правило:

$$\mathbf{u}^* = \arg\min_{\mathbf{u}} \max_{\mathbf{x}} \tilde{r}(\mathbf{x},\mathbf{u})$$

Метод максимального правдоподобия

Функция правдоподобия, это условная ПВ рассматриваемая как функция x: $L(\mathbf{x}) = p(Y(\mathbf{x}_{\text{и}})|\mathbf{x})$

Оценка максимального правдоподобия: $\left.\dfrac{\partial L(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{\text{М}}} = 0$