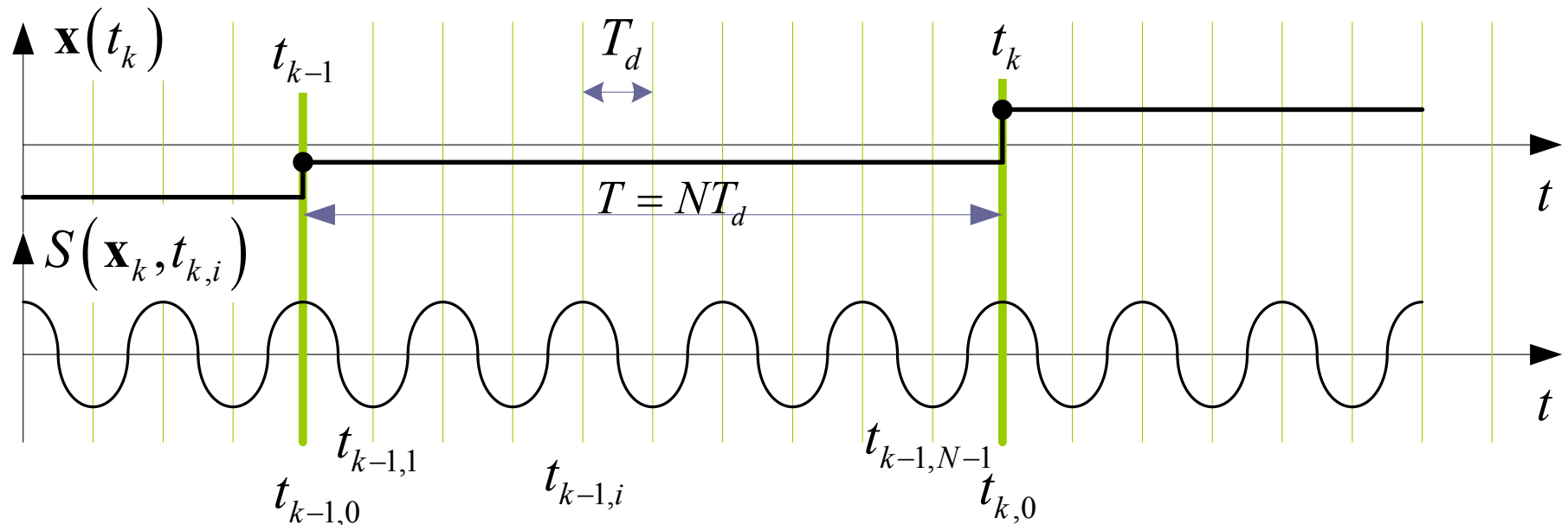


# Занятие 13. Применение теории оптимальной нелинейной фильтрации на практике

## Дискретная нелинейная фильтрация с накоплением при обработке радиосигналов

!!! Как правило, информативные параметры меняются существенно медленнее, чем сам сигнал



# Как сэкономить на скорости обработки

Наблюдения поступают в «частой» шкале времени с шагом дискретизации АЦП -  $T_d$ .

$$y_{k,i} = S_{k,i}(\mathbf{x}_k) + n_{k,i}, \quad t_{k,i} = kT + iT_d; \quad T / T_d = N.$$

$n_{k,i}$  – ДБГШ с дисперсией  $\sigma_n^2$

$S_{k,i}(\mathbf{x}_k)$  – сигнальная функция (известная).

А фильтруемый процесс можно записать в «редкой» шкале времени с шагом дискретизации  $T$ .

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{g}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1})\xi_{k-1}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad t_k = kT$$

$\xi_{k-1}$  - векторный ДБГШ:  $M \begin{bmatrix} \xi_k & \xi_m^T \end{bmatrix} = \mathbf{D}_\xi \delta_{km}$

$\mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k)$ ,  $\mathbf{g}_k(\mathbf{x}_k)$  – известные векторные функции

# Как сэкономить на скорости обработки

Идея: рассмотрим выборку наблюдений на интервале  $t_k \dots t_{k+1}$  как вектор наблюдений величины  $\mathbf{x}_k$ :

$$\mathbf{y}_k = \left[ y_{k,0} \dots y_{k,i} \dots y_{k,N-1} \right]^T = \mathbf{S}_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{n}_k$$

Один из видов записи РФК через дискриминатор:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{D}_{x,k} \mathbf{c}^T \left( \frac{\partial \mathbf{S}_k(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k)}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right)^T \mathbf{D}_n^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{S}_k(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k)) = \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{D}_{xk} \mathbf{c}^T \mathbf{u}_{\Delta k}; \quad (\boldsymbol{\lambda}_k = \mathbf{c} \mathbf{x}_k)$$

$$\mathbf{u}_{\Delta k} = \left( \frac{\partial \mathbf{S}_k(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k)}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right)^T \mathbf{D}_n^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{S}_k(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\partial S_{k,i}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k)}{\partial \lambda_1} (y_{k,i} - S_{k,i}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k)) \\ \vdots \\ \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\partial S_{k,i}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k)}{\partial \lambda_m} (y_{k,i} - S_{k,i}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k)) \end{pmatrix}$$

(1)

Вот оно, накопление!

# Расчет матрицы дисперсий

$$\tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{x},k} = \frac{\partial \mathbf{f}_{k-1}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{D}_{\mathbf{x},k-1} \left( \frac{\partial \mathbf{f}_{k-1}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})}{\partial \mathbf{x}} \right)^{\mathbf{T}} + \mathbf{g}_{k-1}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \mathbf{D}_{\xi} \mathbf{g}_{k-1}^{\mathbf{T}}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})$$

$$\mathbf{D}_{\mathbf{x},k}^{-1} = \tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{x},k}^{-1} + \mathbf{c}^{\mathbf{T}} \left( \frac{\partial \mathbf{S}_k(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k)}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right)^{\mathbf{T}} \mathbf{D}_n^{-1} \frac{\partial \mathbf{S}_k(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k)}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \mathbf{c} = \tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{x},k}^{-1} + \mathbf{c}^{\mathbf{T}} \mathbf{W}_k \mathbf{c},$$

$$\mathbf{W}_k = \left( \frac{\partial \mathbf{S}_k(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k)}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right)^{\mathbf{T}} \mathbf{D}_n^{-1} \frac{\partial \mathbf{S}_k(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k)}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \quad - \text{ЭКВИВАЛЕНТНАЯ МАТРИЦА ВЕСОВ НАБЛЮДЕНИЙ}$$

$$\left( W_{p,q} \right)_k = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\partial S_{k,i}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k)}{\partial \lambda_p} \frac{\partial S_{k,i}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k)}{\partial \lambda_q} \quad \left( \mathbf{D}_n^{-1} = \frac{1}{\sigma_n^2} \mathbf{I}_{N \times N} \right)$$

Отсюда:  $\mathbf{D}_{\mathbf{x},k} = \left( \tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{x},k}^{-1} + \mathbf{c}^{\mathbf{T}} \mathbf{W}_k \mathbf{c} \right)^{-1}$

# Выводы

Расширенный фильтр Калмана можно разбить на дискриминатор и фильтр. При этом можно снизить темп обработки, применяя предварительное накопление сигнала в дискриминаторе. Дискриминатор осуществляет предварительную ЦОС с темпом поступления сигнала от АЦП ( $T_d$ ). А уравнения фильтрации решаются с более низким темпом, соответствующим темпу изменения информативных параметров ( $T$ ).

\*(В аппаратуре дискриминатор обычно реализуют на ПЛИС или ASIC, а фильтр – на микропроцессоре)

# Пример синтеза системы фильтрации амплитуды и фазы сигнала

Опишем наблюдения в виде:

$$y_{k,i} = a_k \cos(\omega_{\Pi} t_{k,i} + \varphi_k) + n_{k,i}, \quad t_{k,i} = kT + iT_d;$$

$n_{k,i}$  – ДБГШ с дисперсией  $\sigma_n^2$ ,  $\omega_{\Pi}$  – пром. частота

Зададим уравнения динамики для информативных параметров:

$$a_k = a_{k-1} + \zeta_{k-1} T,$$

$$\varphi_k = \varphi_{k-1} + \Omega_{k-1} T$$

$$\Omega_k = \Omega_{k-1} + \nu_{k-1} T,$$

$$\nu_k = \nu_{k-1} \cdot (1 - \alpha T) + \alpha T \cdot \xi_{k-1},$$

$\zeta_{k-1}$ ,  $\xi_{k-1}$  – ДБГШ с дисперсиями  $\sigma_{\zeta}^2$  и  $\sigma_{\xi}^2$  соответственно

# Переход к векторно-матричному описанию

Представим уравнения динамики в виде многомерного марковского процесса

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} a_k & \varphi_k & \Omega_k & v_k \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{x}_k = \mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}\xi_{k-1},$$
$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & T & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & (1 - \alpha T) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \alpha T \end{bmatrix}, \quad \xi_{k-1} = \begin{bmatrix} \zeta_{k-1} \\ \varepsilon_{k-1} \end{bmatrix}$$

Формирующие шумы амплитуды и фазы полагаем независимыми, следовательно:

$$\mathbf{D}_\xi = M \left[ \begin{bmatrix} \xi_k & \xi_k^T \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} \sigma_\zeta^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\varepsilon^2 \end{bmatrix}$$

# Синтез дискриминаторов

$$\boldsymbol{\lambda}_k = \begin{vmatrix} a_k \\ \varphi_k \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda}_k = \mathbf{c}\mathbf{x}_k, \quad \text{следовательно } \mathbf{c} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Воспользуемся (1), слайд №3:

$$\mathbf{u}_{dk} = \begin{vmatrix} u_{da,k} \\ u_{d\varphi,k} \end{vmatrix}; \quad u_{da,k} = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\partial S_{k,i}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k)}{\partial a} (y_{k,i} - S_{k,i}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k));$$

$$u_{d\varphi,k} = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\partial S_{k,i}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k)}{\partial \varphi} (y_{k,i} - S_{k,i}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k));$$

$$\frac{\partial S_{k,i}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k)}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \tilde{a}_k \cos(\omega_{\Pi} t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k) = \cos(\omega_{\Pi} t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k);$$

$$\frac{\partial S_{k,i}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k)}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \tilde{a}_k \cos(\omega_{\Pi} t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k) = -\tilde{a}_k \sin(\omega_{\Pi} t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k);$$



# Синтез дискриминаторов

$$\begin{aligned} u_{\text{да},k} &= \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{N-1} \cos(\omega_{\Pi} t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k) \left( y_{k,i} - \tilde{a}_k \cos(\omega_{\Pi} t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k) \right) = \\ &= \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{N-1} y_{k,i} \cos(\omega_{\Pi} t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k) - \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{a}_k \cos^2(\omega_{\Pi} t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k) \approx \\ &\approx \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{N-1} y_{k,i} \cos(\omega_{\Pi} t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k) - \frac{\tilde{a}_k N}{2\sigma_n^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{\text{дф},k} &= \frac{-1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{a}_k \sin(\omega_{\Pi} t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k) \left( y_{k,i} - \tilde{a}_k \cos(\omega_{\Pi} t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k) \right) \approx \\ &\approx \frac{-\tilde{a}_k}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{N-1} y_{k,i} \sin(\omega_{\Pi} t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k) \end{aligned}$$

**Старый добрый коррелятор!**

# Расчет матрицы дисперсий

$$\mathbf{D}_{\mathbf{x},k} = \left( \tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{x},k}^{-1} + \mathbf{c}^T \mathbf{W}_k \mathbf{c} \right)^{-1};$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{k-1}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{g}_{k-1}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) = \mathbf{G} \Rightarrow \tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{x},k} = \mathbf{F} \mathbf{D}_{\mathbf{x},k-1} \mathbf{F}^T + \mathbf{G} \mathbf{D}_\xi \mathbf{G}^T$$

$$\mathbf{W}_k = \begin{vmatrix} W_{aa,k} & W_{a\varphi,k} \\ W_{a\varphi,k} & W_{\varphi\varphi,k} \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{- эквивалентная матрица} \\ \text{весов наблюдений} \end{array} \quad (\text{слайд №4})$$

$$W_{aa,k} = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{N-1} \left( \frac{\partial S_{k,i}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k)}{\partial a} \right)^2 = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{N-1} \cos^2(\omega_{\Pi} t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k) \approx \frac{N}{2\sigma_n^2}$$

$$W_{\varphi\varphi,k} = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{N-1} \left( \frac{\partial S_{k,i}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k)}{\partial \varphi} \right)^2 = \frac{\tilde{a}_k^2}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sin^2(\omega_{\Pi} t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k) \approx \frac{N\tilde{a}_k^2}{2\sigma_n^2}$$

$$W_{a\varphi,k} = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{N-1} \left( \frac{\partial S_{k,i}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k)}{\partial a} \cdot \frac{\partial S_{k,i}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k)}{\partial \varphi} \right) = \frac{\tilde{a}_k}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sin(\omega_{\Pi} t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k) \cos(\omega_{\Pi} t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k) \approx 0$$

# Результат синтеза



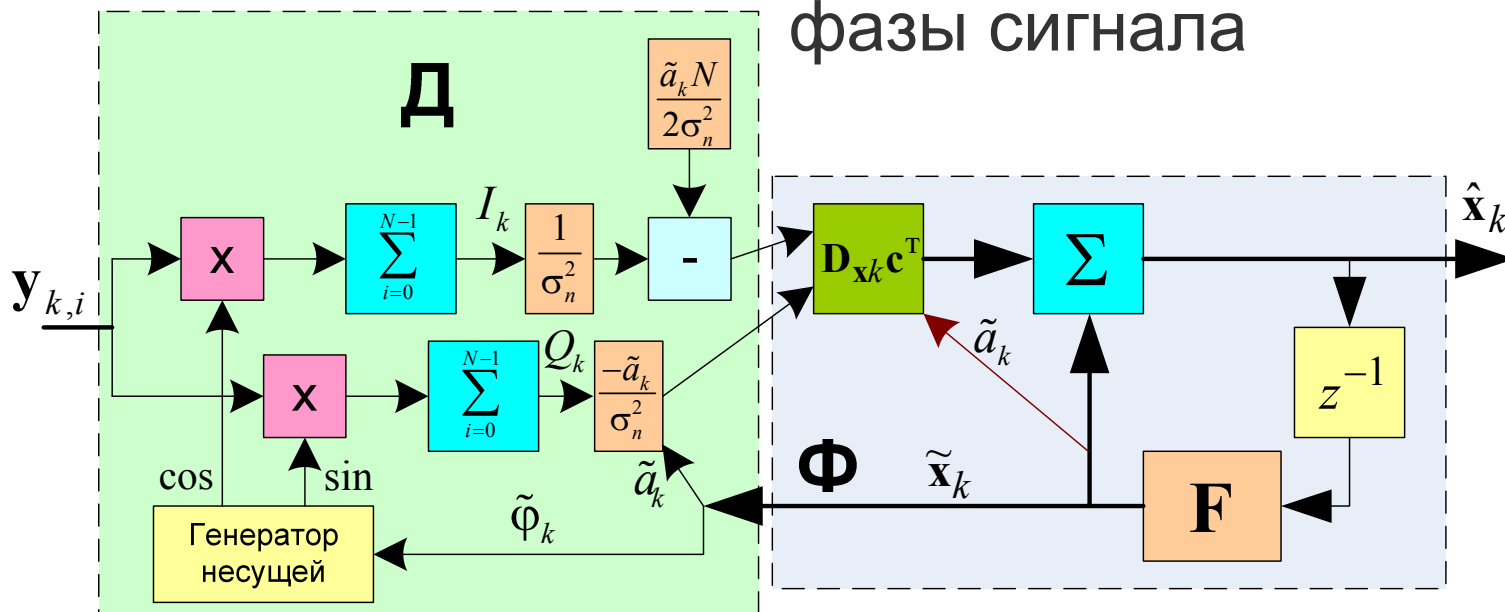
Всё найдено для решения основных уравнений фильтрации:

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} - \text{экстраполяция}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{D}_{\mathbf{x}k}\mathbf{c}^T\mathbf{u}_{dk} - \text{оценивание}$$

$$\mathbf{u}_{dk} = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{N-1} y_{k,i} \cos(\omega_{\text{п}} t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k) - \frac{\tilde{a}_k N}{2\sigma_n^2} \\ \frac{-\tilde{a}_k}{\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{N-1} y_{k,i} \sin(\omega_{\text{п}} t_{k,i} + \tilde{\varphi}_k) \end{cases}$$

Структурная схема системы фильтрации амплитуды и фазы сигнала



# Домашнее задание

## Моделирование системы нелинейной фильтрации фазы и амплитуды

Дано:

$\alpha = 1 \text{ с}^{-1}$  - ширина спектра флуктуаций ускорения;

$T = 10 \text{ мс}$ , (темп фильтрации)  $T_d = 0.2 \text{ мкс}$  (темп работы АЦП)

$\omega_0 = 2\pi \cdot (1602 \text{ МГц})$  – несущая частота (для пересчетов);

$\omega_{\Pi} = 2\pi \cdot (2 \text{ МГц})$  – промежуточная частота;

$$\sigma_a = 10 \text{ м/с}^2 \Rightarrow S_{\xi} = 2\sigma_a^2 \alpha \left( \frac{\omega_0}{c} \right)^2, \quad \sigma_{\xi}^2 = \frac{S_{\xi}}{2T}$$

$$a_0 = 1, \quad \sigma_{\zeta} = 0.5; \quad q_{c/n_0} = 10^{0,1 \cdot (30 \text{ дБГц})}; \quad \sigma_n = \frac{a_0}{2\sqrt{q_{c/n_0} T_d}} = 35.4.$$

# Домашнее задание

1. Смоделировать входное воздействие и рассмотренную нелинейную систему фильтрации фазы и амплитуды в дискретном времени при следующих начальных условиях:

$$\mathbf{D}_0 = \begin{vmatrix} 0.3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (34 \text{ рад/с})^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (340 \text{ рад/с}^2)^2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_0 \\ \varphi_0 \\ \Omega_0 \\ v_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ \pi / 12 \\ 100 \\ 100 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{\varphi}_0 \\ \hat{\Omega}_0 \\ \hat{v}_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Амплитуду моделировать ступенькой:

$$a_k = \begin{cases} 1, & \text{при } t_k < 1 \text{ с;} \\ 0.5, & \text{при } t_k \geq 1 \text{ с.} \end{cases}$$

# Домашнее задание

2. Построить на одном графике временные зависимости

- мгновенной ошибки фильтрации фазы:  $\varepsilon_{\varphi}(t_k) = \hat{\varphi}_k - \varphi_k$ ;

- предельные границы ошибок фильтрации фазы по уровню  $3\sigma$  (по оценкам матрицы дисперсий фильтра  $\mathbf{D}_{x,k}$ ):

$$+3\sqrt{D_{22}}(t_k), \quad -3\sqrt{D_{22}}(t_k), \quad t = 0 \dots 2 \text{ с}$$

(по оси ординат - градусы).

3. Построить на одном графике временные зависимости

- мгновенной ошибки фильтрации амплитуды:  $\varepsilon_a(t_k) = \hat{a}_k - a_k$ ;

- предельные границы ошибок фильтрации амплитуды по уровню  $3\sigma$  (по оценкам матрицы дисперсий фильтра  $\mathbf{D}_{x,k}$ ):

$$+3\sqrt{D_{11}}(t_k), \quad -3\sqrt{D_{11}}(t_k), \quad t = 0 \dots 2 \text{ с}$$

(по оси ординат - единицы)

# Домашнее задание

4. Построить на одном графике временные зависимости
- мгновенной ошибки фильтрации частоты:  $\varepsilon_{\Omega}(t_k) = \hat{\Omega}_k - \Omega_k$ ,
  - предельные границы ошибок фильтрации частоты по уровню  $3\sigma$  (по оценкам матрицы дисперсий фильтра  $\mathbf{D}_{x,k}$ ):

$$+3\sqrt{D_{33}}(t_k), \quad -3\sqrt{D_{33}}(t_k), \quad t = 0 \dots 2 \text{ с}$$

(по оси ординат - рад/с).

Сравнить ошибки частоты с д.з. №3 – сделать вывод о том, в какой системе ошибка оценивания частоты выше при прочих равных условиях.

5. Сделать общие выводы о том, что происходит в системе при падении амплитуды сигнала (уменьшении отношения с/ш)